

Zadanie 1. Zbadaj, czy podane wektory tworzą bazę przestrzeni V :

- a) $B = \{(-2, 0, 3), (5, -2, 1), (-3, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$,
b) $B = \{x^2 - 3x + 2, -2x^2 + x - 3, x^2 + 2\}$, $V = \mathbb{R}[x]_2$,
c) $B = \{(2 + i, -1 - i), (i, 1 + i), (-i - 3, 2i + 1), (3, -2i)\}$, $V = \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$,
d) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$, $V = \mathbf{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Zadanie 2. Znajdź bazę i wymiar poniższych przestrzeni wektorowych:

- a) $V = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 : p(1) + p(-1) = p(2) + p(0) = 0\}$,
b) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : 6a - 5b + 4c = 0, -b + 2c - 3d = 0, 2a - b + 2d = 0 \right\}$.

Zadanie 3. Znajdź bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_4$ zawierającą wektory $x^2 + 5$, $x^2 - 3x$, $x^4 - 2x^3$.

Zadanie 4. Znajdź współrzędne wektora v w bazie B :

- a) $B = ((1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3))$, $v = (6, 9, 14)$,
b) $B = (x^2 + 4x + 3, -x^2 + 2x - 1, 6x + 4)$, $v = (1, 1, 1)$,
c) $B = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$, $v = (7, 14, -1, 2)$.

Zadanie 5. Niech $B = (u, v)$ będzie bazą $\mathbb{R}^2$. Dobierz wektor v tak, aby wektor w miał w bazie B odpowiednie współrzędne:

- a) $u = (1, 2)$, $w = (7, -2)$, $w = [-5, -4]_B$, b) $u = (-3, 3)$, $w = (-5, 1)$, $w = [-3, 2]_B$.

Zadanie 6. Dana jest baza $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ przestrzeni V oraz wektor $w = [2, 1, 0, -1]_B$. Zbadaj, czy podane wektory stanowią bazę V :

- a) $(v_1 + v_2, v_3, v_4 - v_1, w + 2v_4)$, b) $(v_3 - v_1, w, v_1 + v_3, v_4 - v_2)$, c) $(2v_3 - v_4, v_1, w + 3v_1, v_4)$.